Matrislerde Gauss Jordan Yöntemi ve Eşelon Matris Biçimlerinin Performans Ölçümü

Ahmet Çelik[1], Zekeriya Katılmış[2]
[1,2] Dumlupınar Üniversitesi, Bilgisayar Teknolojileri ve Programlama Bölümü, Kütahya
mail.ahmetcelik@gmail.com, zekeriya43@yahoo.com

Özet: Bu çalışmada, matrisler üzerinde en çok gerçekleştirilen işlemlerden olan bir matrisin tersi, bir matrisin eşelon biçimi ve bir matrisin satırca indirgenmiş biçimlerinin hesaplanması görsel bir modül üzerinde gerçekleştirilmiştir ve sonrasında bu modül iki farklı bilgisayar üzerinde test edilerek performans ölçülmüştür. Uygulama programlama dili olarak yaygın kullanılan ve kullanıcının ihtiyaç duyabileceği bileşenlerin birçoğunu sağlayan Visual C# kullanılmıştır. Program özgün bir çalışmadır. Matrisin eşelon biçiminin alınmasında matris satırları üzerinde köşegen elemanı hariç sütün boyunca 0 (sıfır) elde etme amacıyla, yer değiştirme veya uygun katsayıyla çarpılarak satırların yer değiştirmesi gerçekleştirilmiştir. Satırca indirgenmiş eşelon biçiminin elde edilmesinde eşelon biçime dönüştürülmüş matris üzerinde ve yine satırlar uygun katsayıyla çarpılarak bu kez bir önceki satıra köşegen elemanı hariç 0 elde etme amacıyla işlemler gerçekleştirilir [1,2]. Matris tersi bulunurken matrisin boyutuna eşit olan birim matris kullanılarak gerçekleştirilir [3].Ayrıca modülün performans ölçümü de yapılarak kıyaslama gerçekleştirilmiştir. Donanımsal kaynak kullanımı (Thread,CPU vs.) işletim sisteminin performans kaynak izleyicisi tarafından gözlemlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Gaus Jordan Yöntemi, Matris Tersi,Matris Eşelon Biçimi, Birim Matris,Satırca İndirgenmiş Matris Biçimi, Merkezi İşlem Birimi, CPU, İş Parçaları, Kaynak İzleme.

Gauss Jordan Method and Echelon Forms of Matrices Matrix Performance Measurement

Abstract: In this study, most transactions on the inverse of a matrix of matrices, Echelon form of a matrix and the row reduced forms of a matrix calculation was carried out on a visual module and then this module is tested on two different computer to get performance values. Application programming language widely used, and the user may need as many of the components that are used in Visual C#. The program is a study of the original. Echelon form of matrix rows of the matrix on the handling of milk, except along the diagonal element of 0 (zero) in order to obtain, relocation or displacement of the lines carried out by multiplying the appropriate with coefficient. Obtaining the row reduced form of Echelon matrix and converted into a format suitable with coefficient the lines of a previous line, this time by multiplying the diagonal element operations are performed in order to obtain except [1,2]. While the unit matrix which is equal to the size of the matrix inversion is performed using the matrix [3].Also performance measurement was done in this module for comparison. Using hardware source (thread, CPU etc.) is detected with source monitoring tool.

Keywords: Gauss Jordan Method, Matrix Inverse, Matrix Echelon Form, Identity Matrix, Row Reduced Matrix Format, Central Process Unit, CPU, Threads, Source Monitoring.

1. Giriş

Matrisler üzerinde satırlar temel alınarak ya da sütunlar temel alınarak işlem yapmak istendiğinde şu durumların kontrol edilmesi gerekir

-Matrisinilk elemanı 1 olmalıdır.

-Matris aynı satır ve aynı sütun elemanları, bir köşegen boyunca 1 olmalıdır.

-Matrisinköşegen değeri eşelon matris biçiminde "1" olduğunda bu değerinin altında kalan satır değerlerinin tümü "0" olmalı, satırca indirgenmiş eşelon biçimde isealt satır ve üst satır değerleri "0" olmalıdır [1,2].

Bu satır kurallarını uygularken aşağıdaki işlem basamakları gerçekleştirilir [1].

-Matrisiniki satırının yer değiştirmesi ve "1" değerini içeren satıra öncelik verilmesi [4].

-Köşegen değerinin satırı boyunca sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması [2].

-Köşegen değerinin bir katının diğer bir satıra eklenmesi [4].

Satır işlemlerinin uygulanarak eşelon biçim gelmektedir. A ve B matrislerinin eşelon biçimi aşağıda gösterilmiştir.

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 5 & 5\\ -3 & -5 & 5\\ -4 & 7 & -1\end{bmatrix} A_{eş}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -0{,}25\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 7\\ 6 & 5 & 3\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix} \quad B_{eş}=\begin{bmatrix}1 & 1{,}5 & -3{,}5\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

eş : Eşelon Matris

Eşelon biçimin üzerinde satır işlemlerine devam edildiğinde aşağıdaki C ve D matrislerinin satırca indirgenmiş eşelon matris biçimlerine elde edilmektedir.

$$C=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 6\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix} C_{siem}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} E_{siem}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

siem: Satırca İndirgenmiş Eşelon Matris

Bir matrisin tersi bulunurken birkaç yöntem kullanılabilir. Bu yöntemlerden biri de Gauss Jordan yöntemidir [1,3]. Bu yönteme göre matris tersi ile matrisin kendisi çarpılır ve birim matristir. Bir A matrisinin A^{-1} matrisiyle çarpılması sonucu, I birim matrisi elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken bütün matrislerin tersinin olmama durumunun göz ardı edilmemesidir.

Birim matrisi ise şöyle ifade edebiliriz; Sayı sisteminde kullanılan 1 sayısının önemli bir özelliği vardır. (s) herhangi bir sayı olmak üzere 1 s = s 1 = s elde edilmektedir. Bu durum matris sisteminde de karşınıza Eşelonbiçimlere dönüşüm yapılırken A matrisinin $A_{i,j}$ (i=j olmak üzere) elemanının 1 olması sağlanmaya çalışıldığından j sütundaki tüm değer kontrol edilir ve 1 elemanı olan satır varsa $A_{i,j}$ elemanın satırı ile bu satır yer değiştirilir. Eğer bu 1 elemanı olan bir satır yoksa bulunan ilk sıfırdan farklı elemanın bulunduğu satır ile $A_{i,j}$elemanın bulunduğu satır yer değiştirilir ve bu satırdaki bütün elemanlar 1/ $A_{i,j}$ çarpılır ve sonuçlar hücrelere yazılır.

Matris sisteminde, önceki örnekte verilen 1 sayısının özelliğine sahip bir matris vardır ki buna birim matris denilmektedir. Birim matris'den'ci sıradan bir kare matrisin sol üst köşeden sağ alt köşelerini birleştiren köşegenine isabet eden elemanları (1), diğer bütün elemanlarının hepsi sıfır olan matrise birim matris denilmektedir. Aşağıdaki I_1ve I_2 matrisleri birim matrislere örnek olarak gösterilebilir.

$$I_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} I_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matrisin kendi ve matrisin tersi çarpılarak birim matrise eşitlendiğinde satır işlemleri kullanılarak elde edilen A matrisi ve tersi ise aşağıdaki görülmektedir.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -5 & -3\end{bmatrix} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-0.17 & -0.33\\ 0.28 & 0.22\end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}6 & 3 & 9\\ 9 & 3 & 2\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix}-0.04 & 0.10 & 0.07\\ 0.02 & 0.10 & -0.23\\ 0.13 & -0.10 & 0.03\end{bmatrix}}$$

2. Eşelon Matris Biçim

Satırlar üzerinde yapılan matematiksel işlemlerle bir matrisin eşelon biçimi elde edilebilir. Aşağıdaki A matrisi için eşelon biçimini elde ederken gerçekleştirilen işlem aşamalarını inceleyelim.

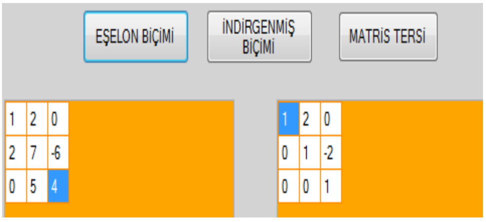
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 7 & -6\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

A matrisinin birinci satırının -2 katı ikinci satıra eklendiğinde aşağıdaki B matrisi elde edilir. İkinci satır 1/3 ile çarpıldığında aşağıdaki C matrisi elde edilir [4].

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix} C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

C matrisinin ikinci satırının -5 katı ikinci satıra eklendiğinde D matrisi elde edilir. Üçüncü satır 1/14 ile çarpılırsa E sonuç matrisi yani matrisin eşelon biçimi elde edilir. Şekil 1'de geliştirilen görsel yazılım ortamında aynı matrisin eşelon biçimi görülmektedir [4,5,6].

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix} E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



Şekil 1:Eşelon Matris Biçimi

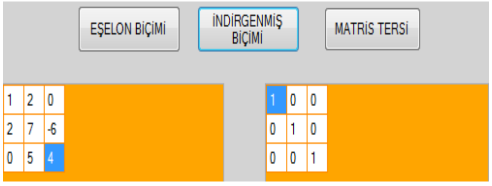
3. Satırca İndirgenmiş Eşelon MatrisBiçimi

A matrisinin satırca indirgenmiş durumunu elde ederken eşelon biçim durumundan devam edilir. Eşelon matris biçimi E matrisi olarak aşağıda verilmiştir. Bu son durumdan itibaren devam edildiğinde, üçüncü satırın 2 katı ikinci satıra eklenerek F matrisi elde edilir [4,5,6].

$$E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Daha sonra F matrisinin ikinci satırının -2 katı birinci satıra eklendiğinde aşağıdaki G matrisiyani A matrisinin satırca indirgenmiş eşelon matris biçimi elde edilir. Ayrıca Şekil 2'de geliştirilen görsel yazılım ortamında aynı matrisin satırca indirgenmiş eşelon biçimi görülmektedir [4].

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



Şekil 2: İndirgenmiş Matris Biçimi

4. Ters Matris

s≠0 niteliğinde herhangi bir gerçek sayı ele alındığında öyle bir sayı bulunmalıdır ve s sayısı için $s^{-1}s=ss^{-1}=1$ olayının gerçekleşmesi gerekmektedir. İşte bu olay matris olaylarında da karşınıza gelmektedir. Buna göre bir A matrisinin verildiği düşünüldüğünde birim matrise eşit olan A A^{-1} = A^{-1} A=1 bağıntısını gerçekleyen bir A^{-1} matrisinin olup olmadığı irdelendiğinde böyle bir matris varsa bu matrise A matrisinin inversi (tersi) denir. Bu bağlantının gerçekleşmesi için matrisin kare matris olması gerekmektedir. Ancak böyle bir durumda A A^{-1} ya da A^{-1} A çarpımları I (birim) matrisine eşit olmaktadır. Bu konuma göre matris tersini şöyle tanımlayabiliriz [3,5,7].

Bir A kare matrisi verildiğinde I birim matris olmak üzere;A^{-1} A = A A^{-1} = I bağıntısını gerçekleştiren bir kare matris mevcut ise buna A matrisinin tersi denilmektedir. Aşağıdaki gibi bir A matrisi verilmiş olduğunda Gauss Jordan yöntemine göre matris tersi işlemi şu adımlar uygulanarak elde edilir [3,5,7].

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A matrisi ile I matrisi üzerinde indirgenmiş satır işlemleri uygulandığında ters matris elde edilir.

$[A \mid I] = [I \mid A^{-1}]$

Bu temel bilgiler ışığındaA matrisi tersi işlemi için ilk adımda birinci satırında -1 ile çarpıldığında aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 2\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

İkinci adımda birinci satırın -5 katı üçüncü satıra eklenir ve aşağıdaki matris sonucu elde edilir.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 7\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Üçüncü adımda ikinci satır 1/2 ile çarpılır ve aşağıdaki matris sonucu elde edilir.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1.5\\ 0 & 4 & 7\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Dördüncü adımda ikinci satır-4 katı üçüncü satıra eklenerek aşağıdaki matris sonucu elde edilir.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1.5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Beşinci adımda üçüncü satır -1.5 ile çarpılır ve aşağıdaki sonuç elde edilir.

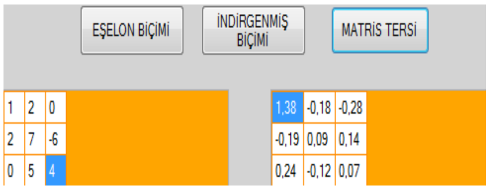
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -7.5 & 3,5 & -1.5\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Altıncı adımda üçüncü satır birinci satıra eklenir ve aşağıdaki matris sonucu elde edilir.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ -7.5 & 3,5 & -1.5\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Yedinci adımda ikinci satır birinci satıra eklenir ve aşağıdaki sonuç yani A matrisinin tersi A^{-1} veŞekil 3'de de geliştirilen yazılım ortamında aynı matrisin ters biçimi görülmektedir [5,7].

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \; A^{-1}=\begin{bmatrix}-3.5 & 1.5 & -0.5\\ -7.5 & 3,5 & -1.5\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

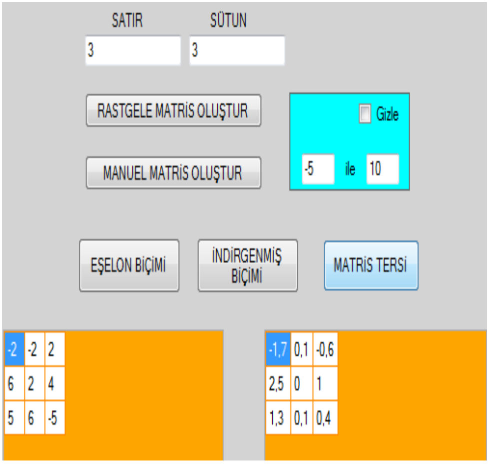


Şekil 3:A matrisinin Tersi

5. Uygulama yazılımı

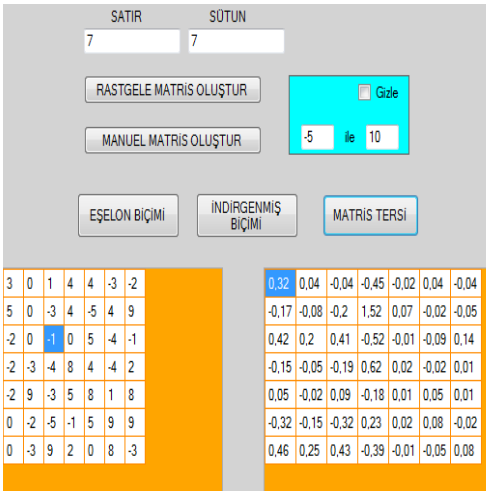
Visual C# programlama diliyle geliştirilen görsel uygulama ortamında matrisler üzerinde matrisin eşelon biçimi, satırca indirgenmiş eşelon matris biçimi ve matrisin tersi alma işlemleri gerçekleştirilmiştir.
Geliştirilen görsel yazılım, belirlenen matris boyutuda kullanılarak matris değerlerinin istenirse belirlenen sınır değer aralığında rastgele değerler atanmasını ya da istenirse elle bütün değerlerin kullanıcının isteğine göre girilmesine olanak sağlamaktadır.
Ayrıca matris değerleri DataGridView bileşeninden yararlanılarak program üzerindegösterilmiştir. Programın görsel araçları kullanmasından dolayı kullanımı oldukça kolay ve anlaşılabilir biçimdedir.

Program üzerinde matris boyut sınırının olmaması ve elde edilen sonuçlarında boyut sınırı olmadan DataGridView üzerinde gösterilebilmesi programın kullanışlı ve elastik özellik barındırmasına işarettir. Şekil 1'de geliştirilen yazılımın tüm bileşenleri ve bir matrisin tersinin elde edilmiş durumu görülmektedir.



Şekil 4: Program Arayüzü ve Matris Tersi

Geliştirilen yazılım matrisler üzerinde boyut sınırı getirmediğinden büyük boyutlu matrisler üzerinde çok kullanışlı olarak rahatça uygulanabilmektedir. Şekil 5'de 7x7 boyutlu bir matrisin tersinin alınmasın gerçekleştirilmesi gösterilmiştir.

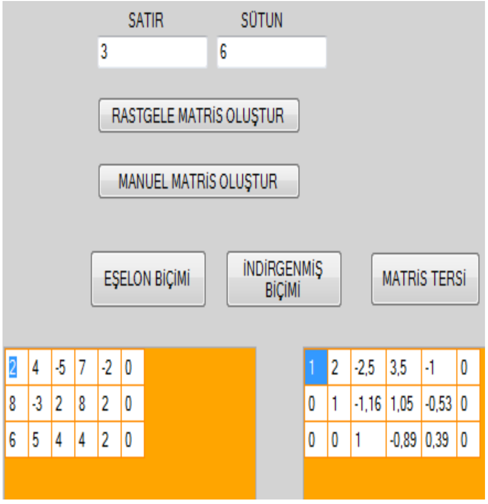


Şekil 5:Çok Boyutlu Matris Tersi

Ayrıca şekil 6'da manüel olarak (elle) matris değerlerinin oluşturulabilmesi ve programın sadece kare matrisleri değil farklı boyutlardaki (satır ve sütun değeri farklı)matris işlemlerini gerçekleştirebilme özelliği görülmektedir.

6.Performans Ölçümü

Bu çalışmada çok iş yükü gerektiren matrislerin eşelon biçimlerinin ve matris tersi işlemlerinin farklı donanıma sahip bir masaüstü ve bir dizüstü bilgisayar üzerinde çalıştırılarak performans kıyaslaması yapılmıştır. Test amaçlı kullanılan farklı bilgisayarların özellikleri tablo 1'de gösterilmiştir.



Şekil 6: Manuel olarak oluşturulmuş boyutu farklı matris

Tablo 1:Bilgisayar Donanımları

Laptop	i7 CPU - 2.40 GHz -8 GB Ram
	4 Çekirdek - 11 Threads - CPU %13
Desktop	TripleCore - 1,90 Ghz - 2 GB Ram -
	3 Çekirdek - 11 Threads -CPU %33

Bu bilgisayarlar üzerinde farklı boyutlardaki matrisler kullanılarak ölçülen işlem süreleri ise tablo 2'de gösterilmiştir.

Tablo 2: Test Süre Ölçümleri

Matris Boyutu		Eşelon Biçim		İndirgenmiş Eşelon Biçim		Matris Tersi	
10	10	0,25	0,17	0,28	0,20	0,30	0,22
15	15	0,89	0,48	0,95	0,51	0,92	0,50
20	20	1,53	0,80	1,64	0,86	1,63	0,84
40	40	8,14	5,13	8,33	5,26	8,11	5,24
80	80	95,80	65,38	102,61	65,54	96,04	65,95
100	100	219,69	156,70	208,63	157,01	208,17	159,64
		Desktop	Laptop	Desktop	Laptop	Desktop	Laptop

7.Sonuç

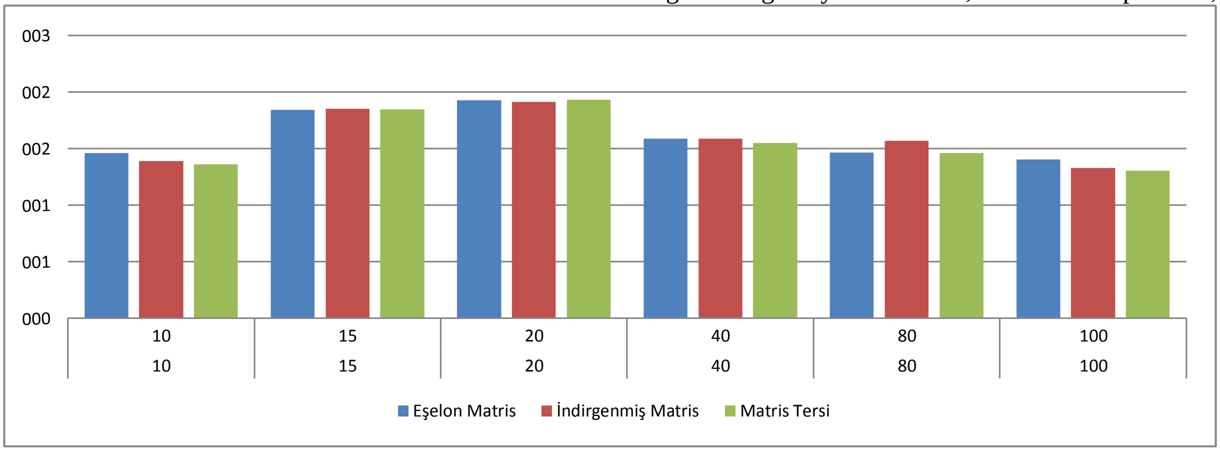
Bu çalışmada matrisler üzerinde en temel işlemler olan eşelon matris biçimi, satırca indirgenmiş eşelon matris biçimi ve en önemlisi olan ve lineer denklem sistemlerinin çözümünde de kullanılan matris tersi işlemler açıklanmıştır. Ayrıca Visual C# programlama dili kullanılarak geliştirilen görsel bir yazılımarayüz üzerindematrisler üzerinde gerçekleştirilen bu işlemlerin elde edilmesi anlatılmıştır.Geliştirilen yazılımın kolay ve anlaşılır olması, hatalı değer düzeltmenin doğrudan yapılabilmesi ve elastik bir görsel modül olması dolayısıyla matris işlemlerinin kolayca ve hızlı bir biçimde gerçekleştirilmesinisağlamaktadır.

Bu çalışmada oluşturulan görsel modül, eşit iş parçacığı (Thread) kullanan, merkezi işlemci birimine

(CPU) sahip dizüstü ve masaüstü bilgisayar üzerinde koşturulmuş ve bazı matris boyutlarında %92 oranında dizüstü bilgisayarda yüksek performans elde edilmiştir [8,9]. Tablo'3 de matris boyutlarına göre performans yüzdeleri gösterilmiştir.

İki bilgisayardan elde edilen performans değerlerinin, daha yüksek donanımsal özelliğe sahip dizüstü bilgisayarda çok dahafazla olması beklenebilir. Dizüstü bilgisayarda bu değerlerin elde edilmesinde, işletim sistemi kaynak izleyicisi yardımıyla tespit edilen, CPU'nun%13 ortalamayla çalışması ve 8 çekirdeğe (Core) sahip olmasına rağmen iş parçaları için 4 çekirdeğin kullanılması neden olarak görülebilir [9]. Bununla birlikte masaüstü bilgisayarın bu iş için %33 ortalamayla ve 3 çekirdekle çalışması da performans değerlerinin bu biçimde oluşmasına neden olabilmektedir.Dizüstü bilgisayarın bütün çekirdeklerine iş yüklerinin dağıtılması ve daha yüksek iş yükü ortalamasıyla çalışması durumunda daha fazla performans farkı oluşabilecektir [10].

Tablo 3: Desktop – Laptop Performans Kıyaslaması



8. Kaynaklar

[1] http://math.fullerton.edu/mathews/

[2] http://pages.pacificcoast.net/~cazelais/

[3]http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ MathH110/gji.pdf

[4]http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi

[5]http://en.wikipedia.org/wiki/

[6]http://people.richland.edu/

[7]http://mathworld.wolfram.com/

[8] http://msdn.microsoft.com/

[9] Multi-coreArchitectures, JernejBarbic, 15-213 Spring 2007, May 3 2007

[10]ThreadSchedulingfor Multi-Core Platforms Mohan Rajagopalan Brian T.Lewis Todd A. Anderson, Programming Systems Lab, Intel Corporation, SantaClara, CA 94054